Lineare Optimierung

Prof. Dr. Fekete (WS 2004/05)

Wie lautet der Fundamentalsatz der linearen Optimierung?

Man betrachte das LP

$$\min c^T x, Ax = b, x \geq 0.$$

1. Hat das System mit $Ax = b$, $x \geq 0$ eine zulässige Lösung, dann gibt es auch eine zulässige Basislösung.

2. Hat das LP eine Optimallösung, so gibt es auch eine optimale Basislösung.

Welche unterschiedlichen Ideen zum Lösen linearer Optimierungsprobleme gibt es?

1. Wenn Optimallösung existiert, dann gibt es optimale Ecklösung.

2. Extremalpunkte entsprechen Basislösungen und umgekehrt.

3. Es gibt nur endlich viel Basislösungen.

4. Es genügt, nur zulässige Basislösungen zu betrachten.

5. Hat man eine zulässige Basislösung als Startlösung, so reicht es meist aus, nur eine Teilmenge der zulässigen Basislösungen zu betrachten, um sich lokal zu verbessern.

6. Beim Lösen von Gleichungssystemen für sehr ähnliche Basen, kann man den größten Teil Arbeit wiederverwenden.

Wie sieht das Simplexverfahren aus?

Bezüglich der Basis B kann ein LP wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \max c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t. } A_B x_B + A_N x_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0 \end{aligned}$$

In Tableauschreibweise sieht das dann so aus:

	$\tilde{c}_N = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-z = -c_B^T A_B^{-1} b$
B	$A_B^{-1} A_N$	$x_B = A_B^{-1} b$

Welche Beobachtungen können beim Simplexverfahren gemacht werden?

Optimalität: Ist $\tilde{c}_N = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \leq 0$, dann ist $x = (x_B, x_N)$ optimal.

Lokale Verbesserung: Wähle positiven Koeffizienten $\tilde{c}_{N(s)}$, erhöhe $x_{N(s)}$.

Endlichkeit: Falls $A_B^{-1} A_{N(s)} \leq 0$ ist, dann kann $x_{N(s)}$ beliebig erhöht werden.

Austauschvariable: Sei r die Zeile, in der zuerst Gleichheit erreicht wird, wähle

$$\frac{t_{r0}}{t_{rs}} = \min \left\{ \frac{t_{i0}}{t_{is}} \mid t_{is} > 0 \right\}.$$

Basiswechsel: In B ersetze r durch s, also $B(r) \longleftrightarrow N(s)$.

Wie sehen Primales und Duales Problem in Standardform aus und wie formt man sie ineinander um?

Primales Problem	Duales Problem
$\min c^T x$ $Ax = b$ $x \geq 0$ $\min c^T x + d^T y$ $Ax + By \geq a$ $Cx + Dy = b$ $x \geq 0$	$\max y^T b$ $y^T A \leq c^T$ $\max u^T a + v^T b$ $u^T A + v^T C \leq c^T$ $u^T B + v^T D = d^T$ $u \geq 0$
Minimierungsproblem Restriktionen Variablen	Maximierungsproblem Variablen Restriktionen
Ungleichheitsrestriktion ($\geq$) Gleichheitsrestriktion	nicht-negative Variable ($\geq$) unbeschränkte Variable
nicht-negative Variable ($\geq$) unbeschränkte Variable	Ungleichheitsrestriktion ($\leq$) Gleichheitsrestriktion

Wie lautet der schwache/starke Dualitätssatz?

Schwacher Dualitätssatz: Es gilt

$$x \in P, y \in D \Rightarrow c^T x \geq y^T Ax = y^T b,$$

bzw.

$$\min\{c^T x \mid Ax \leq b\} \geq \max\{y^T b \mid y^T A = c^T, y \geq 0\},$$

d.h. jede zulässige Lösung eines der beiden Probleme liefert eine Schranke für das andere Problem.

Starker Dualitätssatz: Falls eines der beiden LPs optimal lösbar ist, dann gilt Gleichheit der Optimalwerte (insbesondere ist das andere auch optimal lösbar).

Was besagt der Satz über den komplementären Schlupf?

Betrachte ein primales Problem P und das dazugehörige duale Problem D. Falls

- $\bar{x}$ optimal für P ist und
- $\bar{y}$ optimal für D ist,

dann gelten:

$$\bar{x}_i > 0 \Longrightarrow y^T A_{\bullet i} = c_i,$$
$$\bar{y}^T A_{\bullet i} < c_i \Longrightarrow x_i = 0.$$

Welche Varianten des Simplexverfahrens gibt es?

- Duales Simplexverfahren
- Primal-duales Simplexverfahren
- Revidiertes Simplexverfahren
- Netzwerksimplex

Wie lassen sich Matrixspiele als LP darstellen?

Der Erwartungswert des Zeilenspielers ergibt sich zu

$$xAy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j,$$

und er kann seinen Verlust begrenzen durch

$$\min_y xAy = \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i.$$

Eine optimale Hedgingstrategie ist dann

$$\max \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \text{unter } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\max z, \text{unter } z - \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0.$$

Wie lautet der Minimax-Satz?

Für jede $(n \times m)$-Matrix A gibt es

- einen stochastischen Zeilenvektor x^* der Länge n,
- einen stochastischen Spaltenvektor y^* der Länge m,

so, dass

$$\min_y x^* A y = \max_x x A y^*$$

(dabei werden $\min$ und $\max$ über stochastische Vektoren gebildet).

Wie ist ein Versandproblem definiert?

Ein *Versandproblem* ist ein Problem der Form

$$\min c^T x, Ax = b, x \geq 0,$$

wobei A die $(n \times m)$-Inzidenzmatrix zu dem dazugehörigen Netzwerk ist und $\sum b_i = 0$ gilt.

Die notwendigen und gleichzeitig hinreichenden Bedingungen hierfür lauten:

1. Die Bilanz an jedem Knoten entspricht dem b-Wert (Angebot/Nachfrage) an dem Knoten.

2. Die Flüsse x_{ij} sind nicht-negativ.

Welche Eigenschaften hat der Trägergraph einer nicht-degenerierten Basislösung des Transportproblems?

Betrachte eine Basislösung zum LP

$$\min c^T x, \tilde{A}x = \tilde{b}, x > 0.$$

Der *Trägergraph* dazu besteht aus allen Kanten e mit $x_e > 0$. Der Trägergraph einer nicht-degenerierten Basislösung hat folgende Eigenschaften

- Er besteht aus $n - 1$ Kanten.

- Er hat keine Kreise.

Somit ist jede Basislösung ein aufspannender Baum –und umgekehrt.

In welchen Schritten findet man einen kostenminimalen Fluss in einem Netzwerk?

1. Bestimme zulässige Startlösung x als Baum T im Netzwerk.
2. Berechne $y_1, \ldots, y_n$ mit $y_i + c_{ij} = y_j$ $(y_n = 0)$ für $ij \in T$.
3. Bestimme Kante $e = uv$ mit $y_u + c_{uv} < y_v$, falls existent.
4. Falls eine kritische Kante auf dem Kreis $T \cup \{e\}$ existiert, bestimme
   a) so eine Kante,
   b) den Fluss auf e,
   c) die neuen Flüsse auf dem Kreis, die kritische Kante fliegt raus.

Wie findet man eine zulässige Startlösung für den Netzwerk-Simplex?

Man fügt einen Hilfsknoten S ein mit den folgende Kanten

$$\begin{aligned} is, x_{is} &= -b_i && \text{für } i \text{ Quelle, also } b_i < 0 \\ si, x_{si} &= b_i && \text{für } i \text{ Senke, also } b_i \geq 0 \end{aligned}$$

und den Hilfskosten

$$\begin{aligned} p_{ij} &= 1 && \text{für Hilfskanten } ij \\ p_{ij} &= 0 && \text{für natürliche Kanten } ij. \end{aligned}$$

1. T enthält Hilfskante uv mit $x^*_{uv} > 0$, Problem ist unzulässig.
2. T enthält keine Hilfskante, T ist zulässige Startlösung.
3. T enthält Hilfskante uv mit $x^*_{uv} = 0$, T ist degenerierte Basislösung.

Wie lautet die Strategie von Cunningham?

Die Strategie von Cunningham verhindert das Kreiseln beim Netzwerksimplex.

Wenn in jedem degenerierten Pivotschritt, der einen Baum T in einen Baum $T + e - f$ überführt, die neue Kante e in $T + e - f$ vom fest gewählten Knoten n wegzeigt, dann kann der Netzwerksimplex nicht kreiseln.

Ein Baum T heißt *stark zulässig*, wenn in der zugehörigen Baumlösung x jede Kante ij mit $x_{ij} = 0$ vom Knoten n wegzeigt.

Welche Pivotauswahlregeln garantieren, dass die Simplexmethode nicht kreiselt?

Bland-Regel: Wähle die in Frage kommende Spalte mit dem kleinsten Index. Wähle die in Frage kommende Basisvariable mit dem kleinsten Index.

Lexikographische Pivotregel: Wähle eine beliebige Spalte, die ein negatives Element im reduzierten Kostenvektor hat. Wähle die Zeile $i = r$ so aus, dass gilt

$$\underset{i \text{ so, dass } a_{is}>0}{\text{lex-min}} \left(\frac{a_i}{a_{is}} \right).$$

Was versteht man unter der lexikographischen Ordnung von Vektoren?

Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Man sagt, dass v *lexikographisch positiv* ist, wenn $v \neq 0$ und der erste in der Sequenz $v_1, \ldots, v_n$ von Null verschiedene Eintrag positiv ist. v ist *lexikographisch negativ*, wenn $-v$ lexikographisch positiv ist.

Zum Vergleich von Vektoren v, w betrachtet man die Differenz $v - w$:

$$v \overset{\mathrm{L}}{>} w \Longleftrightarrow v - w \overset{\mathrm{L}}{>} 0.$$

Wie lautet der Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen?

Eine Verschärfung des Farkas-Lemma liefert:
Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{rang}\{a_1, \ldots, a_n, b\} = t$. Dann gilt:

Entweder

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : b = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, x \geq 0,$$

oder

$$\exists y \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : y a_i \geq 0 \text{ und } yb < 0$$

und für $t - 1$ unabhängige Vektoren a_i gilt sogar $y a_i = 0$.

Wie lautet der Satz von Farkas-Minkowski-Weyl?

Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.

Was ist der Unterschied zwischen einem Polytop und einem Polyeder?

Ein *Polyeder* ist die Schnittmenge von endlich vielen affinen Halbräumen, d.h.

$$P \subset \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \exists A, b : P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein *Polytop*

$$\Longleftrightarrow \exists \{x_1, \ldots, x_t\} \in \mathbb{R}^n : X = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_t\}).$$

Jeder polyedrische Kegel ist ein Polyeder, aber nicht notwendiger Weise umgekehrt.

Der Dekompensationssatz für Polyeder von Motzkin besagt, dass $P \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Polyeder ist, wenn ein Polytop Q und ein polyedrischer Kegel C existieren, sodass $P = Q + C$ gilt.

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Polytop genau dann, wenn P ein beschränktes Polyeder ist.

Wie kann man das Matching-Problem eines bipartiten Graphen als LP darstellen?

Sei $G = (V, E)$ bipartit. Die optimalen Basislösungen von

$$\begin{aligned} \max \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 & \qquad \forall v \in V \\ x_e \geq 0 & \end{aligned}$$

sind immer ganzzahlig, d.h. man erhält durch Lösen des LPs ein kardinalitäts-maximales gewichtetes Matching.

Wie kann man das Matching-Problem eines nicht bipartiten Graphen als LP darstellen?

Ist $\bar{x}$ eine Basislösung des Matching-LPs. Dann hat $\bar{x}$ nur $0, \frac{1}{2}, 1$ als mögliche Einträge, wobei die Kanten mit $\bar{x}_e = \frac{1}{2}$ ungerade Kreise sind.

Die Basislösungen von

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \frac{|S| - 1}{2} \qquad \forall S \subseteq V \text{ mit } 3 \leq |S| \leq |V| - 3, |S| \text{ ungerade}$$

$$x_e \geq 0$$

sind alle ganzzahlig, d.h. das LP beschreibt die konvexe Hülle der ganzzahligen Lösungen.

Wie ist das allgemeine Vorgehen zum Finden einer ganzzahligen Lösung mit Hilfe eines LPs?

Gegeben sei ein LP, für das eine optimale ganzzahlige Lösung gesucht wird. Wenn die Lösung des LPs ganzzahlig ist, so ist dies gleichzeitig das Optimum des ILPs. Also

1. Löse LP.

2. Wenn Lösung ganzzahlig ist, dann STOP.

3. Füge zusätzliche Restriktion hinzu, die keine ganzzahligen Lösungen abschneidet. Gehe zu 1.

Diese zusätzlichen Schnittebenen heißen *Gomory-Cuts*.

Durch geeignete Auswahlregeln erhält man einen endlichen Algorithmus.

Wie begründet sich die untere Laufzeitschranke für die meisten NP-schweren Probleme?

1. Sortieren heißt, unter anfangs $n!$ möglichen Permutationen eine eindeutige zu identifizieren.

2. Jeder Vergleich teilt die Menge der Permutationen in zwei Teilmengen.

3. Im schlechtesten Fall bleibt immer die größere Teilmenge übrig.

4. Also braucht man im schlechtesten Fall mindestens

   $$\log n! = \Omega(n \log n)$$

   Vergleiche.

Dies ist keine Aussage über eine konkreten Algorithmus, sondern über ein ganzes Problem an sich für alle denkbaren Algorithmen.

Wie kann man das Rundreiseproblem als LP darstellen?

Gegeben seien n Städte mit den Abständen c dazwischen. Die LP-Formulierung des TSP lautet

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{e \in E} c_e x_e & & \\
\sum_{e \in \delta(v)} x_e &= 2 & \forall v \in V \\
\sum_{e \in \delta(S)} x_e &\geq 2 & \forall \emptyset \neq S \subsetneq V \\
x_e &\in [0,1] &
\end{aligned}
$$

Was lässt sich über das Finden von polynomiellen Algorithmen für ein Optimierungsproblem sagen?

Gegeben sei ein Polyeder P. Das Lösen der Aufgaben

Optimierung: Optimiere eine lineare Zielfunktion über P.

Separierung: Gegeben sei ein Punkt $\bar{x}$. Entscheide, ob $\bar{x}$ in P liegt oder gib eine verletzte Restriktion an.

ist äquivalent. D.h. für die Existenz eines polynomiellen Algorithmus zum Optimieren reicht es, einen polynomiellen Algorithmus zum Separieren zu finden.

Separieren liefert genau den Schritt, der bei der Iteration der Ellipsoidmethode benötigt wird.

Warum ist die Simplexmethode besser als gnadenloses Ausprobieren?

- Die Simplexmethode probiert nur zulässige Basislösungen aus.

- Die Simplexmethode durchläuft nicht unbedingt alle zulässigen Basislösungen.

- Es wird Rechenaufwand bei den Updates gespart, denn das Berechnen von N Basislösungen durch $x_B = A_B^{-1} A_N$ bedeutet das Lösen von $n \times n$-Gleichungssystemen mit Gauss. Dies benötigt $\mathcal{O}(N \cdot n^3)$.

  Beim Simplexverfahren fällt pro Pivotschritt aber nur ein Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ an. Insgesamt ist der Aufwand also $\mathcal{O}(N \cdot n^2)$.

Welche Bedeutung hat das Farkas-Lemma für die Komplexität von „Linearer Optimierung“?

Das Farkas-Lemma liefert ein polynomiell verifizierbares Zertifikat für die Nicht-zulässigkeit eines LPs, also $\mathrm{LP} \in \text{co-NP}$. Insgesamt bedeutet das, dass

$$\mathrm{LP} \in \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$$

ist.

Lineare Optimierung
Prof. Dr. Fekete (WS 2004/05)

Zu welcher Komplexitätsklasse gehört „Lineare Optimierung“? Welche Algorithmentypen belegen dieses?

Es gilt $\mathrm{LP} \in \mathrm{P}$.

Algorithmen, die dies belegen, sind zum Beispiel

1. die Ellipsoidmethode und
2. die Innere-Punkte-Methode.

Was weiß man über die Laufzeit der Simplexmethode für die meisten Pivotauswahlregeln?

Für fast alle Pivotauswahlregeln gibt es Beispiele (d.h. Instanzen) mit exponentiell vielen Pivotschritten. Ein Beispiel hierfür ist der Klee-Minty-Würfel.

Hieraus folgt aber noch nicht, dass man für polynomielle Laufzeit zum Lösen von LPs auf andere Verfahren zurückgreifen muss. Nach Auswahlmethoden mit polynomieller Laufzeit wird noch geforscht.

Stimmt es, dass in einem Paar zueinander dualer LPs wenigstens eines eine zulässige Lösung besitzt?

Nein, das stimmt nicht. Sowohl (P) als auch (D) können unzulässig sein. Zum Beispiel

Primales Problem	Duales Problem
$\max c^T x$	$\min y^T b$
$Ax \leq b$	$A^T y = c$
	$y \geq 0$

mit $A = 0$, $b = -1$ und $c = 1$.

Welches sind Vor- bzw. Nachteile der Ellipsoidmethode?

Vorteil: Theoretisch sehr schnell (polynomielle Laufzeit).

Nachteil: Nichtlineare Berechnungen und daraus resultierende Rundungsfehler, sowie die numerische Instabilität der extrem verformten Ellipsoide erfordern zusätzliche Maßnahmen, die in der Praxis laufzeitverlängernd wirken.

Empfehlung: Je nach Problemstruktur sind in der Praxis besser:

- Simplexverfahren, da meist viel schneller als Worst-Case.
- Innere-Punkte-Methoden.

Was ist ein NP-vollständiges Problem?

Ein NP-vollständiges Problem ist NP-schwer und liegt in NP und

- es ist noch kein polynomieller Algorithmus bekannt.
- wenn es einen polynomiellen Algorithmus gäbe, dann wäre $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.
- es glaubt niemand daran, dass ein polynomieller Algorithmus existiert.

Wann ist das revidierte Simplexverfahren vorteilhafter als die Grundversion der Simplexmethode?

Die revidierte Simplexmethode besitzt wesentlich weniger Rechenaufwand, speziell bei Programmen mit erheblich mehr Variablen als Restriktionen ($n >> m$). Hinzu kommt, dass diese Methode numerisch stabiler ist, da immer wieder auf die Ausgangsdaten zurückgegriffen wird.

Ist die Anzahl der Basislösungen eines linearen Programms immer endlich?

Zu jeder Basislösung gibt es genau eine $m \times m$ Untermatrix mit $\operatorname{rang}(A) = m$, wobei $Ax = b$ das Polytop beschreibt, über dem optimiert wird. Also ist die Anzahl der Basislösungen $\leq \binom{m}{n}$, also endlich.