

Network Failure Detection and Graph Connectivity

Hausarbeit im Rahmen des Seminars
„Kombinatorische Optimierung“
im Wintersemester 2004/2005



Vorgelegt am 17.01.2005 von
Andreas Baude
Finanz- und Wirtschaftsmathematik, 9. Fachsemester
E-Mail: a.baude@tu-braunschweig.de
<http://a.baude.net/>

Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
Institut für Mathematische Optimierung
Prof. Dr. Uwe Zimmermann, Prof. Dr. Sándor Fekete

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	II
Abbildungsverzeichnis	II
1 Einführung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Vorbetrachtungen	1
1.3 Notationen	2
2 Detektoren für Ausfälle von Kanten	2
2.1 Detektormenge für minimale Kantenschnitte	2
2.1.1 Ausgewogene Kaktusrepräsentation	2
2.1.2 Konstruktion einer Detektormenge für minimale Schnitte	5
2.2 Kleinere Detektormengen für Kantenausfälle	7
3 Detektoren für Ausfälle von Knoten	8
3.1 Starke Detektormenge für Shredder	9
3.2 Starke Detektormenge für zweiseitige minimale Schnitte	10
3.3 Schwache Detektormenge für minimale Knotenschnitte	13
Literaturverzeichnis	III

Abbildungsverzeichnis

2.1 Kaktus	3
2.2 Beweisskizze zu Satz 2.2	3
2.3 Finden einer C -Detektormenge.	6
3.1 Beispiel zu Lemma 3.5	9
3.2 Starke Detektormenge für Shredder	10
3.3 Zweiseitige, sich kreuzende Schnitte	11
3.4 Unterteilung des Graphen durch den Algorithmus	12
3.5 Beweisskizze zu Theorem 3.15	14

1 Einführung

1.1 Motivation

In einem Netzwerk kann es zu Ausfällen von Knoten oder Kanten kommen. Geht man beispielsweise von einem Computernetzwerk aus, in dem die Knoten Rechner und die Kanten Netzwerkverbindungen darstellen, so kann es passieren, dass Rechner ausfallen oder Netzwerkverbindungen getrennt werden. Zur Erkennung von Ausfällen, die ein Netzwerk unzusammenhängend machen, ist es notwendig, Detektoren so zu platzieren, dass ein Zusammenbruch des Netzes mit großer Wahrscheinlichkeit entdeckt wird.

Eine einfache Lösung dieses Problems wäre, an jedem Knoten einen Detektor zu installieren. Bei der Vermeidung von Kosten geht es darum, möglichst wenige Detektoren so zu verteilen, dass alle Schwachstellen gemeldet werden. Folgende Fragen gilt es deshalb zu beantworten:

- Wie viele Detektoren benötigt man?
- Wo sind diese Detektoren zu platzieren?

Da sich schon mehrere Artikel diesem Problem angenommen haben, geht es in dieser Ausarbeitung, die sich stark an [4] orientiert, um eine Verbesserung der bereits vorhandenen Schranken. Zu diesem Zweck wird die Größe der kleinsten Detektormenge in Relation zu den Kanten- und Knotenzusammenhangszahlen gesetzt.

Definition 1.1 (Zusammenhangszahl). Die *Kantenzusammenhangszahl* λ von G ist die kleinste Anzahl von Kanten, deren Weglassen einen unzusammenhängenden Graphen ergibt.

Entsprechend ist die *Knotenzusammenhangszahl* κ von G die kleinste Anzahl von Knoten, deren Weglassen einen unzusammenhängenden Graphen ergibt.

1.2 Vorbetrachtungen

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph G mit n Knoten. Es wird davon ausgegangen, dass höchstens k Netzwerkelemente –also Kanten oder Knoten– entfernt werden. Hierdurch kann ein unzusammenhängender Graph mit zwei Knotenmengen A und B so entstehen, dass keine Kante mehr existiert, die A mit B verbindet. Beide Teilmengen A und B sollen jeweils eine Größe $\geq \varepsilon n$ haben.

Definition 1.2 ((ε, k) -Ausfall). Ein Ereignis, das einen Graphen in zwei Teilmengen A und B mit den eben beschriebenen Eigenschaften trennt, wird (ε, k) -**Ausfall** genannt.

Um den Ausfall eines Netzwerkes aufzudecken, werden Detektoren an einer Teilmenge D der Knoten von G platziert. Bricht jetzt die Kommunikation zweier Detektoren zusammen, weil es entweder keinen Pfad zwischen ihnen mehr gibt oder weil einer von ihnen gelöscht wurde, so wird ein Fehler registriert. Damit alle Fehler erkannt werden, muss D die Eigenschaft besitzen, dass bei jedem (ε, k) -Ausfall zwei der Detektoren nicht mehr in der Lage sind miteinander zu kommunizieren.

Definition 1.3 ((ε, k) -Detektormenge). Eine Teilmenge D von Knoten aus G wird (ε, k) -**Detektormenge** genannt, wenn jeder (ε, k) -Ausfall dazu führt, dass zwei Elemente aus D nicht mehr in der Lage sind miteinander zu kommunizieren.

Man sagt, dass D einen Schnitt X **erkennt**, wenn zwei Detektoren in $G \setminus X$ getrennt werden.

1.3 Notationen

Um die folgenden Untersuchungen übersichtlich zu halten, werden an dieser Stelle einige Definitionen vorgeschoben und grundlegende Annahmen getroffen.

In dieser Arbeit handelt es sich um ungerichtete Graphen $G = (V, E)$. Ein *Kanten-/ Knotenschnitt* ist eine Menge X von Kanten/ Knoten, so dass $G \setminus X$ unzusammenhängend ist. Ein *minimaler Schnitt* ist ein Schnitt minimaler Größe. Eine Menge von Knoten wird *tight* genannt, wenn sie eine Vereinigung von einigen, aber nicht notwendiger Weise allen Komponenten eines minimalen Schnittes ist. Ein Schnitt X wird ε -*ausgewogen* genannt, wenn es zwei Knotenmengen der Größe $\geq \varepsilon n$ in $G \setminus X$ gibt, die voneinander getrennt sind. Ein ε -ausgewogener Schnitt von $\leq k$ Kanten/ Knoten wird (ε, k) -*Schnitt* genannt.

Da sich die Vorgehensweise unterscheidet, wenn es sich um Ausfälle der Kanten oder um Ausfälle der Knoten handelt, werden die beiden Arten in den nächsten beiden Kapiteln getrennt untersucht.

2 Detektoren für Ausfälle von Kanten

In diesem Kapitel werden nur Schnitte von Kanten und Detektoren für Kantenausfälle betrachtet. Ein Gegenspieler darf demnach bis zu k Kanten entfernen, wodurch ein (ε, k) -Kantenausfall entsteht. Offensichtlich kann es keine (ε, k) -Kantenausfälle geben, falls $k < \lambda$ ist.

Jeder Graph besitzt eine Kaktusrepräsentation, die alle minimalen Schnitte des Graphen enthält. Erzeugt man hieraus ein reduziertes ε -Kaktuspaar, so kann man mit Hilfe eines Algorithmus in polynomieller Zeit eine T-kanonische Menge der Größe $\leq \frac{1}{\varepsilon}$ finden. Jede kleinste (ε, λ) -Detektormenge ist eine T-kanonische Menge und die Größe der kleinsten (ε, λ) -Detektormenge ist somit unabhängig G und λ .

Kann ein Gegenspieler das k -fache eines minimalen Schnittes an Kanten entfernen, so wird gezeigt, dass eine zufällig ausgewählte Menge von $\mathcal{O}(\frac{k}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon})$ Knoten mit hoher Wahrscheinlichkeit eine $(\varepsilon, k\lambda)$ -Detektormenge ist. Hierbei werden bereits bekannte Grenzen durch Hinzunahme der Kantenzusammenhangszahl verbessert.

2.1 Detektormenge für minimale Kantenschnitte

2.1.1 Ausgewogene Kaktusrepräsentation

An dieser Stelle wird zunächst eine neue Darstellung von Graphen eingeführt, die das Auffinden von minimalen Schnitten vereinfacht. Hierbei werden Kanten als Kreise der Länge zwei betrachtet. Kreise der Länge echt größer als zwei werden *echte Kreise* genannt. Es sei angenommen, dass Kreiskanten in einem echten Kreis die Kapazität $\frac{1}{2}$ und Pfadkanten die Kapazität 1 haben. Damit haben alle minimalen Schnitte die Kapazität 1. Entweder wird ein Pfad getrennt oder zwei Kreiskanten.

Definition 2.1 (Kaktus). *Ein **Kaktus** ist ein zusammenhängender Graph, bei dem zwei Kreise höchstens einen gemeinsamen Knoten haben.*

*In einem Kaktus werden alle Knoten vom Grad eins **Blätter** genannt. Alle Knoten, die sich in einem Kreis befinden und vom Grad zwei sind heißen **Kreisknoten**. Die restlichen Knoten sind die **Astknotten**.*

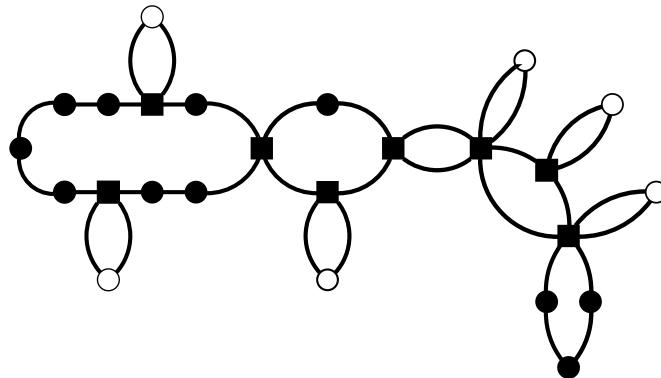


Abbildung 2.1: Kaktus mit Blättern (○), Kreisknoten (●) und Astknoten (■)

Ein Astknoten v in einem Kaktus T verbindet mindestens zwei Kreise miteinander. Wird der Knoten v entfernt, so wird T in mindestens zwei jeweils zusammenhängende Teilgraphen, sogenannte v -Komponenten, zerteilt. Jede dieser v -Komponenten X ist tight, denn das Entfernen zweier adjazenter Kanten von v innerhalb eines Kreises ist ein minimaler Schnitt, dessen eine Komponente genau eine v -Komponente ist.

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen Komponenten eines minimalen Schnittes und den v -Komponenten in einem Kaktusgraphen.

Satz 2.2. *Angenommen, S sei eine Menge in einem Kaktus T , die tight ist, und v ein Astknoten. Dann gelten:*

- (a) *Wenn $v \in S$ ist, dann enthält S mindestens eine v -Komponente.*
- (b) *Wenn $v \notin S$ ist, dann ist S in mindestens einer v -Komponente enthalten.*
- (c) *Für jede v -Komponente X von T gilt entweder $X \subset S$, $S \subset X$, $X \subset V - S$ oder $V - S \subset X$.*

Beweis: Ein minimaler Schnitt liegt in höchstens einer v -Komponente, von denen es mindestens zwei gibt, und erzeugt zwei jeweils zusammenhängende Komponenten S und $V - S$. Sei R die Vereinigung aller v -Komponenten, in denen der minimale Schnitt nicht liegt, und v selbst, wodurch R zusammenhängend ist.

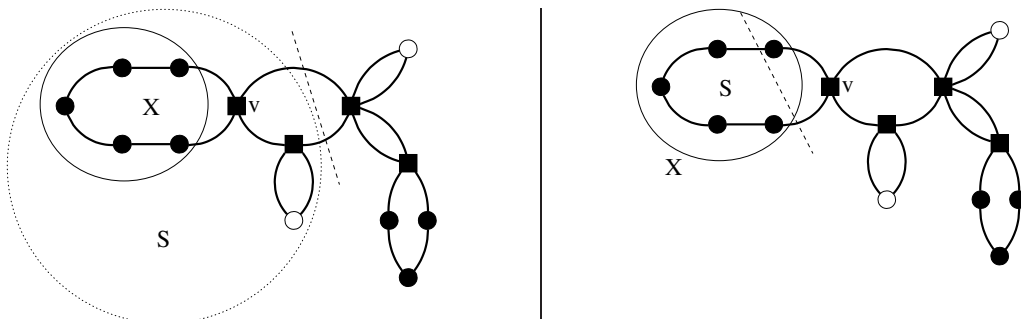


Abbildung 2.2: Skizze zum Beweis von Satz 2.2 für die Fälle (a) und (b).

- zu (a): Wenn $v \in S$ ist, dann ist R in S und somit mindestens eine v -Komponente.
- zu (b): Ist $v \notin S$, dann sind R und S disjunkt und S liegt in $V - R$ und das ist eine Teilmenge der zerschrittenen v -Komponente.
- zu (c): Ist $X \subset R$, dann gilt nach (a) und (b), dass entweder $X \subset S$ oder $X \subset V - S$ gelten muss. Im anderen Fall sind X und R disjunkt, und damit ist X die zerschnittene v -Komponente und es gilt entweder $S \subset X$ oder $V - S \subset X$. \square

Definition 2.3 (Kaktuspaar). G sei ein gewichteter Graph mit n Knoten. Ein **Kaktuspaar** ist ein Tupel (T, π) , wobei T ein Kaktus und π eine solche Abbildung von $V(G)$ auf $V(T)$ ist, dass gilt:

Für jede Menge M , die tight in T ist, ist die Menge $\pi^{-1}(M)$ tight in G .

Man kann sagen, dass für jede Menge M , die tight in T ist, (T, π) den minimalen Schnitt C von G so repräsentiert, dass $\pi^{-1}(M)$ eine C -Komponente ist.

Definition 2.4 (Kaktusrepräsentation). Eine **Kaktusrepräsentation** von G ist ein Kaktuspaar von G , das alle minimalen Schnitte von G repräsentiert.

Ohne Beweis sei an dieser Stelle festgehalten, dass für jeden gewichteten Graphen eine Kaktusrepräsentation der Größe $\mathcal{O}(n)$ effizient konstruiert werden kann.

Da in dieser Arbeit ε -ausgewogene Schnitte untersucht werden, ist die Definition einer Kaktusrepräsentation zu allgemein und es werden folgende Spezifizierungen vorgenommen.

Definition 2.5 (ε -Kaktuspaar, ε -Kaktus). Ein ε -**Kaktuspaar** ist ein Kaktuspaar, das die ε -ausgewogenen minimalen Schnitte repräsentiert. Ein ε -**Kaktus** ist der Kaktus in einem solchen Kaktuspaar.

Definition 2.6 (ε -ausgewogene Kaktusrepräsentation). Eine ε -**ausgewogene Kaktusrepräsentation** von G ist ein ε -Kaktuspaar von G , das mindestens alle minimalen ε -ausgewogenen Schnitte von G repräsentiert.

Somit ist jede Kaktusrepräsentation auch ausgewogen. Eine Teilmenge S von Knoten in einem Kaktus heißt *heavy*, wenn $|\pi^{-1}(S)| \geq \varepsilon n$ ist. Ein Kaktuspaar heißt *reduziert*, wenn jede v -Komponente heavy ist. Ein reduziertes ε -Kaktuspaar kann schrittweise, ausgehend von einer normalen Kaktusrepräsentation, folgendermaßen erzeugt werden.

Lemma 2.7. Angenommen, T sei ein ε -Kaktus, v ein Astknoten und X eine v -Komponente, die nicht heavy ist. T' wird aus T erzeugt, indem X nach v kontrahiert wird. Dann ist T' ebenfalls ein ε -Kaktus.

Beweis: Für jeden ε -ausgewogenen minimalen Schnitt C in G existiert ein minimaler Schnitt C' in T , der ihn repräsentiert. Nach Satz 2.2c existiert eine Komponente S von C' , so dass entweder $X \subset S$ oder $S \subset X$ gilt. Da S heavy ist und X nach Annahme nicht, muss $X \subset S$ gelten. Damit ist $v \in S$ und C' ist auch ein minimaler Schnitt in T' . Somit wird C von T' repräsentiert. \square

2.1.2 Konstruktion einer Detektormenge für minimale Schnitte

G sei ein gewichteter Graph und (T, π) ein reduziertes ε -Kaktuspaar von G . In diesem Abschnitt werden (ε, λ) -Detektormengen von minimaler Größe bezüglich T untersucht.

Ein *Teilkreis* ist eine Menge von aufeinanderfolgenden Kreisknoten eines echten Kreises in T .

Definition 2.8 (Kanonischer Teilkaktus, T -kanonisch). *Eine Knotenmenge von T , die jedes Blatt enthält, ein Element in jedem heavy Teilkreis hat und keine Astknoten enthält, ist ein kanonischer Teilkaktus.*

Ein Menge $D \subset V(G)$ von Detektoren heißt T -kanonisch, wenn $\pi(D)$ ein kanonischer Teilkaktus ist, und höchstens ein Detektor auf jeden Knoten von T abgebildet wird.

$S \subset V$ ist *ausgewogen*, wenn sowohl S als auch $V \setminus S$ heavy sind. $S' \subset V(T)$ ist ausgewogen, wenn $\pi^{-1}(S')$ ausgewogen ist. Für jede ausgewogene Menge S von G , die tight ist, sei $\pi'(S)$ eine (ausgewogene) Menge S' von T , die ebenfalls tight ist, so, dass $S = \pi^{-1}(S')$ ist.

Die nächsten beiden Lemma werden zeigen, dass jede kleinste (ε, λ) -Detektormenge eine kleinste T -kanonische Menge ist. Somit kann ein Algorithmus, der eine T -kanonische Menge in polynomieller Zeit liefert, dafür benutzt werden, eine kleinste (ε, λ) -Detektormenge zu finden.

Lemma 2.9. *Jede kleinste (ε, λ) -Detektormenge ist T -kanonisch.*

Beweis: Sei D eine kleinste (ε, λ) -Detektormenge, deren Elemente Detektoren genannt werden. Nach Definition 2.8 sind folgende Punkte zu zeigen:

- (i) Höchstens ein Detektor wird auf jeden Knoten in T abgebildet.
- (ii) Für jedes Blatt und jeden heavy Teilkreis gibt es einen Detektor, der darauf abgebildet wird.
- (iii) Es gibt keine Detektoren, die auf Astknoten in T abgebildet werden.

Die einzelnen Punkte werden nacheinander bewiesen und zeigen, dass D T -kanonisch ist.

zu (i): Angenommen, zwei Detektoren d_1 und d_2 werden auf denselben Knoten v in T abgebildet. Für den Widerspruch reicht es zu zeigen, dass es dann eine kleinere (ε, λ) -Detektormenge gibt, nämlich $D - d_1$. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gibt es eine ausgewogene Menge S von G , die tight ist und deren dazugehöriger Schnitt nicht von $D - d_1$ erkannt wird und somit $D - d_1$ enthält. Folglich ist $d_1 \notin S$. Sei $S' = \pi'(S)$. Da $d_2 \in S$ und $v = \pi(d_2) \in S'$ ist, muss $d_1 \in S$ sein, also ein Widerspruch. ζ

zu (ii): Es gibt für jede Menge in T , die heavy und tight ist, einen Detektor, der darauf abgebildet wird. Somit also auch auf jedes Blatt und jeden heavy Teilkreis.

zu (iii): Angenommen, ein Detektor d wird auf einen Astknoten v in T abgebildet. Analog zu (i) wird behauptet, dass $D - d$ ebenfalls eine (ε, λ) -Detektormenge ist. Angenommen, dem ist nicht so, dann sind $D - d$ und eine Menge S , die tight und heavy ist, disjunkt –denn sonst wäre es ja doch eine Detektormenge. Sei $S' = \pi'(S)$. Da D eine (ε, λ) -Detektormenge ist, ist $d \in S$ und somit $v \in S'$. Also enthält S' nach Satz 2.2a eine v -Komponente S'' . Da T reduziert ist, ist S'' heavy und es gibt einen Detektor, der darauf abgebildet wird. Also enthält S noch einen anderen Detektor aus D als d , ein Widerspruch. ζ □

Lemma 2.10. *Jede T -kanonische Menge ist eine (ε, λ) -Detektormenge.*

Beweis: Angenommen, $D \subset V$ und $\pi(D)$ trifft jedes Blatt und jeden heavy Teilkreis von T , ist also T -kanonisch. Zu zeigen ist, dass $\pi(D)$ jede Menge von T , die tight und heavy ist, trifft, also eine (ε, λ) -Detektormenge ist. Hierfür muss gezeigt werden, dass jede Menge $S \subseteq T$, die tight und heavy ist, ein Blatt oder einen heavy Teilkreis enthält.

Gezeigt wird dieses mit Induktion über die Größe von S . Als Induktionsanfang wird eine Menge S gewählt, die nur aus einem Knoten v besteht. Nach Satz 2.2a kann dies kein Astknoten sein. Also ist v ein Blatt oder ein heavy Teilkreis, der lediglich aus einem Knoten besteht.

Induktionsschritt: Wenn S einen Astknoten v enthält, dann enthält S nach Satz 2.2a eine heavy v -Komponente, die die Induktionsannahme erfüllt. Enthält S keinen Astknoten, so liegt S in einem einzelnen Kreis und S ist ein heavy Teilkreis. \square

Theorem 2.11. *Eine kleinste (ε, λ) -Detektormenge hat eine Größe von höchstens $\frac{1}{\varepsilon}$. Es existiert ein Algorithmus, der eine solche Menge in polynomieller Zeit liefert.*

Beweis: Sei (T, π) ein reduziertes ε -Kaktuspaar von G . Bekannt ist, dass kleinste (ε, λ) -Detektormengen auf kleinste kanonische Teilkakteen von T abgebildet werden (Lemma 2.9). Deshalb reicht ein Algorithmus aus, der einen kleinsten kanonischen Teilkaktus von T erzeugt.

Sei S eine Teilmenge eines echten Kreises C in T . S heißt C -Detektormenge, wenn S keine Astknoten enthält und jeder heavy Teilkreis von C ein Element aus S enthält. Nach Definition ist die leere Menge eine C -Detektorknotenmenge, wenn es keine heavy Teilkreise in C gibt. Eine Teilmenge von T ist ein kanonischer Teilkaktus, wenn es sich dabei um eine Vereinigung von Blättern von T und disjunkter C -Detektormengen (jeweils eine für jeden echten Kreis in T) handelt. Um einen kleinsten kanonischen Teilkaktus von T zu erzeugen, reicht es aus, jeden echten Kreis C von T einzeln zu betrachten und jeweils eine kleinste C -Detektormenge dafür zu konstruieren.

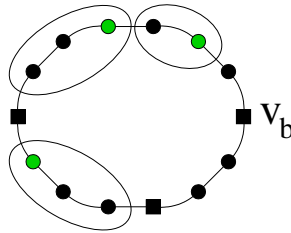


Abbildung 2.3: Finden einer C -Detektormenge.

Konstruktion: Angenommen, T besteht aus mehr als einem Kreis und C enthält einen oder mehrere Astknoten. Angenommen, C enthält Kreisknoten, dann wird ein beliebiger Astknoten v_b ausgewählt, dem ein Kreisknoten v folgt. Man beginne mit v . Im Iterationsschritt startet man mit einem Kreisknoten und bewegt sich im Uhrzeigersinn entlang von C , bis ein heavy Teilkreis entdeckt wurde (dieser Teilkreis wird *ausgewählt* genannt) oder ein Astknoten erreicht ist. Der folgende Schritt startet mit dem nächsten Kreisknoten. Stoppe, wenn v_b erreicht ist. S sei die Menge der jeweils letzten Knoten (im Uhrzeigersinn) der ausgewählten Teilkreise (siehe Abbildung 2.3).

S ist eine C -Detektormenge und es ist die kleinste, wie durch die folgenden Beobachtungen gezeigt wird. Sei S' eine C -Detektormenge und $v \in C$ ein Astknoten oder ein Element von S' . Sei v' der nächste Knoten im Uhrzeigersinn. Sei C' der kleinste heavy Teilkreis der mit v' beginnt, wenn er existiert. Sei w der letzte Knoten von C' . Dann enthält C' mindestens ein Element aus S . $S' - C' + w$ ist eine C -Detektormenge mit der gleichen oder einer geringeren Anzahl an Elementen. Wird dieses Verfahren nacheinander angewendet, dann kann S aus S' erzeugt werden, ohne die Anzahl der Detektoren zu erhöhen.

Dieser Algorithmus platziert einen Detektor auf jedem Blatt von T und jedem ausgewählten Teilkreis. Da die Blätter von T heavy sind und die ausgewählten Teilkreise heavy und disjunkt sind, überdeckt jeder Detektor bei dieser Konstruktion mindestens ein Gewicht von εn . Da das Gesamtgewicht (der Knoten) von T n ist, ist die Gesamtanzahl der Detektoren höchstens $\frac{1}{\varepsilon}$. \square

2.2 Kleinere Detektormengen für Kantenausfälle

In diesem Abschnitt wird eine bereits vorhandene Grenze für die Größe einer (ε, k) -Detektormenge weiter verbessert.

Eine Knotenmenge S heißt k -kantentrennbar, falls eine Menge Z von $\leq k$ Kanten so existiert, dass S eine Vereinigung von Komponenten von $G \setminus Z$ ist. Sei \mathcal{F} die Familie aller k -kantentrennbaren Mengen. Man sagt, dass $A \subseteq V$ von \mathcal{F} zerschmettert wird, wenn für alle $B \subseteq A$ ein $F \in \mathcal{F}$ existiert, so dass $B = A \cap F$ ist.

Die VC -Dimension d von \mathcal{F} ist definiert als maximale Kardinalität einer Teilmenge von V , die von \mathcal{F} zerschmettert wird. Ein ε -Netz ist eine Menge, die jedes $F \in \mathcal{F}$ der Größe $\geq \varepsilon n$ trifft. Nach [3] ist ein ε -Netz für \mathcal{F} eine (ε, k) -Detektormenge. Weiterhin wurde in [3] gezeigt, dass die VC -Dimension von \mathcal{F} höchstens $2k + 1$ ist, was zu einer Grenze von $\mathcal{O}(\frac{k}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon})$ Knoten für die Größe einer (ε, k) -Detektormenge führt. Im Weiteren wird gezeigt, dass die VC -Dimension von \mathcal{F} durch $\mathcal{O}(\frac{k}{\lambda})$ begrenzt werden kann, wodurch man sofort das folgende Theorem erhält.

Theorem 2.12. *Eine Menge von $\mathcal{O}(\frac{k}{\lambda \varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon})$ zufällig ausgewählten Knoten ist mit hoher Wahrscheinlichkeit eine (ε, k) -Detektormenge.*

Um die neue Grenze der VC -Dimension zu beweisen, sind folgende Definitionen nötig. R sei eine Teilmenge von V der Größe r . $d(R)$ sei die Anzahl der Kanten, die R verlassen und $q(R)$ die Anzahl der Komponenten C von $G - R$, für die $d(C)$ ungerade ist. Ein R -Pfad ist ein Pfad, der verschiedene Elemente aus R miteinander verbindet.

Theorem 2.13. [5] *Die maximale Anzahl an kantendisjunkten R -Pfadern ist*

$$\frac{1}{2} \min \left\{ \sum d(V_i) - q(\cup V_i) \right\},$$

wobei das Minimum so über alle möglichen Auswahlmöglichkeiten disjunkter Teilmengen von Knoten V_1, V_2, \dots, V_r genommen wird, dass $|V_i \cap R| = 1$ ist.

Korollar 2.14. *Es gibt $\Omega(r\lambda)$ kantendisjunkte R -Pfade.*

Beweis: Man betrachte eine Auswahl disjunkter Teilmengen von Knoten V_1, V_2, \dots, V_r , wobei $|V_i \cap R| = 1$ ist. Sei $d = \sum d(V_i)$ und $q = q(\cup V_i)$. Durch Theorem 2.13 reicht es zu zeigen, dass $d - q = \Omega(r\lambda)$ gilt.

Es ist $d \geq r\lambda$, da $d(V_i) \geq \lambda$ sein muss, da es sonst einen minimalen Schnitt mit weniger als λ Kanten geben würde. C_1, \dots, C_q seien die so gewählten Komponenten C von $G - \cup V_i$, dass $d(C)$ ungerade ist. Alle Kanten, die ein C_i verlassen, führen zu $\cup V_i$. Somit ist

$$d \geq d(\cup V_i) \geq \sum d(C_i) \geq q\lambda.$$

Ist $r \geq q$, dann ist $d - q \geq r\lambda - q \geq r(\lambda - 1)$. Andernfalls ist $d - q \geq q\lambda - q \geq r(\lambda - 1)$. Somit ist $d - q \geq \lambda r - r = \Omega(r\lambda)$. \square

Lemma 2.15. *Sei (R, F) ein Multigraph von R . Dann existiert eine solche Unterteilung von R in Mengen R_1 und R_2 , dass höchstens $\frac{1}{2}|F|$ Kanten zwischen R_1 und R_2 existieren.*

Lemma 2.16. *Die VC-Dimension von \mathcal{F} ist $\mathcal{O}(\frac{k}{\lambda})$.*

Beweis: Sei R eine Teilmenge von V der Größe r . Nach Korollar 2.14 gibt es eine Familie \mathcal{P} von $\Omega(r\lambda)$ kantendisjunkter R -Pfade. Sei (R, F) ein Multigraph von R so, dass eine Übereinstimmung zwischen uv -Pfadern in \mathcal{P} und den Kanten $uv \in F$ gibt. Nach dem vorangegangenen Lemma existiert eine Unterteilung von R in die Mengen R_1 und R_2 so, dass es $\Omega(r\lambda)$ kantendisjunkte Pfade zwischen R_1 und R_2 gibt. Man wähle $r = \Theta(\frac{k}{\lambda})$. Somit wird garantiert, dass eine Familie \mathcal{P}' aus mindestens $k + 1$ kantendisjunkten Pfaden zwischen R_1 und R_2 besteht.

Es wird behauptet, dass R nicht von \mathcal{F} zerschmettert wird. Angenommen, das gelte nicht. Dann muss nach der Definition von \mathcal{F} ein solches $X \in \mathcal{F}$ existieren, dass $X \cap R = R_1$ ist. X ist eine Vereinigung der Komponenten eines Schnittes Z mit höchstens k Kanten. Z und mindestens ein Pfad $p \in \mathcal{P}'$ sind disjunkt. Die Enden von p sind also in derselben Z -Komponente und damit entweder beide in X oder beide nicht in X . In beiden Fällen widerspricht dieses $X \cap R = R_1$. Hieraus folgt, die VC-Dimension von \mathcal{F} ist $r = \mathcal{O}(\frac{k}{\lambda})$. \square

3 Detektoren für Ausfälle von Knoten

In diesem Kapitel werden nur Schnitte von Knoten betrachtet. Analog zum vorherigen Abschnitt wird die Größe der Detektormenge dieses Mal in Relation zur Knotenzusammenhangszahl gesetzt.

Im Folgenden wird bewiesen, dass jeder Graph G mit $\kappa = \mathcal{O}(\varepsilon^2 n)$ eine (ε, κ) -Detektormenge der Größe $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ besitzt. Eine Menge von $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon})$ zufällig ausgewählten Knoten ist mit hoher Wahrscheinlichkeit eine (ε, κ) -Detektormenge. Wiederum sind diese Grenzen unabhängig von der Größe des Graphen und der Knotenzusammenhangszahl.

Die Untersuchungen gestalten sich hierbei schwieriger als bei Kantenausfällen, da keine Repräsentation von minimalen Knotenschnitten analog zur Kaktusrepräsentation bei Kantenschnitten existiert. Im ersten Teil wird deshalb zunächst eine Detektormenge für minimale Schnitte, die mindestens drei Komponenten hinterlassen (Shredder), erzeugt. Hierbei wird in alle Komponenten eines jeden ε -Shredders, die keinen weiteren ε -Shredder enthalten, ein Detektor platziert. Dann wird im zweiten Teil mit einem Greedy-Algorithmus eine maximale Familie von relativ ausgewogenen minimalen Knotenschnitten, die lediglich zwei Seiten produzieren und wobei die kleineren Seiten zueinander disjunkt sind, konstruiert. Danach wird gezeigt, dass es nach dem Setzen von Detektoren in jede von den kleinen Seiten keinen minimalen Knotenschnitt mehr gibt, der zwei Komponenten der Größe $\geq \varepsilon n$ erzeugt und nicht erkannt wird. Nimmt man die Detektormenge für Shredder und die für die zweiseitigen minimalen Schnitte zusammen, so hat erhält man eine (ε, λ) -Detektormenge für Knotenschnitte.

3.1 Starke Detektormenge für Shredder

Ein Schnitt X heißt *zweiseitig*, wenn $G \setminus X$ genau zwei zusammenhängende Komponenten hat, die die *Seiten* von X genannt werden. Ein *Shredder* ist ein minimaler Schnitt, mit drei oder mehr Komponenten, ein ε -*Shredder* ist ein ε -ausgewogener Shredder.

Definition 3.1 (Starke/ schwache Detektormenge). Wenn durch einen Schnitt X zwei Detektoren in $G \setminus X$ getrennt sind, dann heißt D **starke Detektormenge**. D' heißt **schwache Detektormenge**, wenn D' entweder eine starke Detektormenge ist oder ein Element durch den Schnitt X entfernt wurde.

Definition 3.2 (Überlappende Schnitte). Seien S und T minimale Schnitte. S und T heißen **überlappend**, wenn S mindestens zwei T -Komponenten trifft und umgekehrt. Andernfalls heißen sie **nicht-überlappend**.

Lemma 3.3. Überlappen sich zwei Shredder S und T , dann existiert eine Komponente Q von entweder S oder T so, dass $V - S - T$ in Q enthalten ist.

Beweis: Siehe [1], Lemma 4.3. □

Korollar 3.4. Ist $\kappa < \varepsilon n$, dann sind zwei ε -Shredder S und T nicht-überlappend.

Beweis: Da $\kappa < \varepsilon n$ ist, existiert mindestens ein Knoten in jeder Komponente des Shredders S , der nicht in T enthalten ist. Somit existieren zwei Knoten $u, v \in V - S - T$, die sowohl durch S als auch durch T getrennt werden. Angenommen, S und T sind überlappend, dann existiert nach Lemma 3.3 eine Komponente von S oder T , die $V - S - T$ und damit u und v enthält. Widerspruch, also sind S und T nicht-überlappend. □

Lemma 3.5. Seien S und T zwei sich nicht-überlappende Shredder und C die S -Komponente, die T trifft. Dann enthält C alle T -Komponenten bis auf eine, die C' genannt wird. Weiterhin ist $V - S - C$ in C' enthalten, das heißt, alle S -Komponenten abgesehen von C .

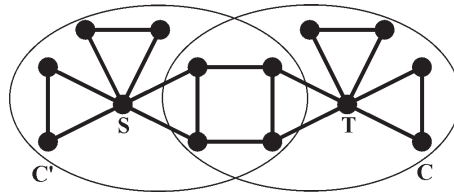


Abbildung 3.1: Beispiel zu Lemma 3.5 mit den Shreddern S und T .

Beweis: Sei $v \in S - T$. Da S ein minimaler Schnitt ist, hat v zu jeder S -Komponente Kanten, denn sonst wäre $S - v$ ein Schnitt und S damit nicht minimal. Demnach ist $V - S - C + \{v\}$ zusammenhängend. Da $T \subset (S \cup C)$ ist, ist $V - T - C$ zusammenhängend und liegt damit in einer T -Komponente C' . Folglich sind alle weiteren T -Komponenten in C enthalten und $V - S - C \subset V - T - C \subset C'$. □

In einer Familie \mathcal{F} von ε -Shreddern wird eine Komponente eines Shredders \mathcal{F} -Kopf genannt, wenn sie mindestens einen Shredder aus \mathcal{F} trifft.

Lemma 3.6. *Sei \mathcal{F} eine Familie von ε -Shreddern, $\kappa < \varepsilon n$ und S ein ε -Shredder mit einem \mathcal{F} -Kopf H . Dann trifft jede Detektormenge für \mathcal{F} H .*

Beweis: Angenommen, es existiere eine (ε, k) -Detektormenge für Shredder und S sei ein ε -Shredder mit einem \mathcal{F} -Kopf H . Dann existiert ein Shredder $T \in \mathcal{F}$, der H trifft. Nach Lemma 3.5 enthält H alle T -Komponenten bis auf eine und somit auch einen Detektor. \square

Theorem 3.7. *Angenommen, $\kappa < \varepsilon n$. Dann ist eine Menge von $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon \delta}\right)$ zufällig ausgewählten Knoten eine starke Detektormenge für ε -Shredder mit Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \delta$. Weiterhin hat eine kleinste Detektormenge für ε -Shredder eine Größe von $\leq \frac{1}{\varepsilon}$ und kann in polynomieller Zeit erzeugt werden.*

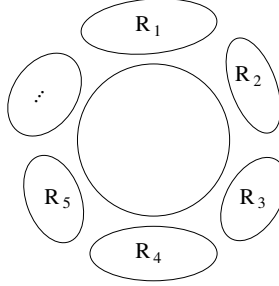


Abbildung 3.2: Starke Detektormenge für Shredder. In jedem der $\frac{1}{\varepsilon}$ vielen Reste R_i wird ein Detektor platziert.

Beweis: Sei \mathcal{F}_0 die Familie aller ε -Shredder. Man starte mit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$. Solange ein ε -Shredder $S \in \mathcal{F}$ mit zwei oder mehr \mathcal{F} -Köpfen existiert, wird S von \mathcal{F} entfernt. \mathcal{F}_1 sei die so entstandene Familie von Shreddern. Nach Lemma 3.6 ist eine starke Detektormenge für \mathcal{F}_1 auch eine starke Detektormenge für \mathcal{F}_0 .

Sei $S \in \mathcal{F}_1$. Der Kopf H von S sei der einzige \mathcal{F}_1 -Kopf von S . Nach Lemma 3.5 ist für jedes $S, T \in \mathcal{F}_1$ der Rest $V - S - H$ von S im Kopf von T enthalten, und umgekehrt. Insbesondere sind die Reste paarweise disjunkt. Da jeder Kopf den Rest eines anderen Kopfes enthält, ist eine Knotenmenge D eine Detektormenge für \mathcal{F}_1 , wenn D den Rest von jedem $S \in \mathcal{F}_1$ trifft. Damit hat die kleinste Detektormenge für \mathcal{F}_1 eine Größe von $|\mathcal{F}_1|$. Da die Reste eine Größe von $\geq \varepsilon n$ haben, gilt $|\mathcal{F}_1| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Die Anwendung des Coupon Collector Problems liefert die probabilistische Abschätzung. \square

3.2 Starke Detektormenge für zweiseitige minimale Schnitte

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Konstruktion schwacher Detektormengen zweiseitiger (ε, κ) -Schnitte. Eine Knotenmenge S heißt *zusammenhängend*, wenn der durch S induzierte Teilgraph von G zusammenhängend ist, andernfalls *unzusammenhängend*. Ein Schnitt X *erhält* S , wenn X und S disjunkt sind und S in einer Komponente von $G \setminus X$ liegt. $N(S)$ kennzeichnet die *Nachbarn* von S , also alle Knoten in $V - S$, die eine Kante nach S haben.

Definition 3.8 (Kreuzende Schnitte). *Zweiseitige minimale Schnitte X und Y heißen **stark kreuzend**, wenn jede Seite von X jede Seite von Y trifft. X und Y heißen **schwach kreuzend**, wenn der Schnitt X beide Seiten von Y trifft und umgekehrt.*

Die Seiten von X und Y werden P_1, P_2 und Q_1, Q_2 genannt. Ihr Schnitt („Viertel“) ist $C_{ij} = P_i \cap Q_j$. Weiterhin sei $X_i = Q_i \cap X$, $Y_i = P_i \cap Y$ und $S = X \cap Y$ (siehe Abbildung 3.3).

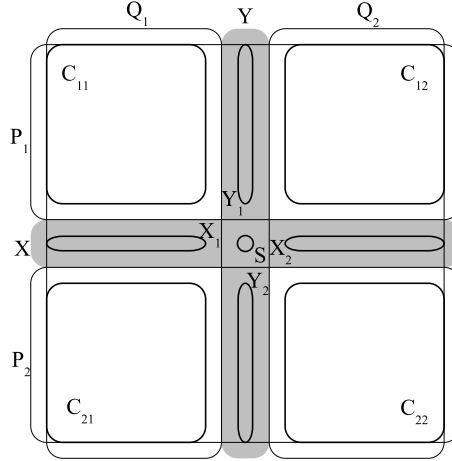


Abbildung 3.3: Zweiseitige, sich kreuzende Schnitte X und Y .

Lemma 3.9 (Das Zwei-Viertel-Lemma). *Angenommen, die zweiseitigen minimalen Schnitte X und Y kreuzen sich schwach, sodass die beiden Viertel C_{21} und C_{12} nicht leer sind. Dann gelten*

- (a) $|X_1| = |Y_1|$ und $|Y_2| = |X_2|$,
- (b) C_{21} und C_{12} sind tight und $N(C_{ij}) = Y_i + X_j + S$,
- (c) $V - C_{ij} - N(C_{ij})$ ist für $i \neq j$ zusammenhängend.

Beweis: $T = X_1 + Y_2 + S$ und $U = X_2 + Y_1 + S$ trennen C_{21} beziehungsweise C_{12} vom Rest des Graphen. Da X und Y minimale Schnitte sind, muss wegen

$$|T| \geq |X| \Rightarrow |X_1| + |Y_2| + |S| \geq |X_1| + |X_2| + |S| \Leftrightarrow |Y_2| \geq |X_2|$$

und

$$|U| \geq |Y| \Rightarrow |X_2| + |Y_1| + |S| \geq |Y_1| + |Y_2| + |S| \Leftrightarrow |X_2| \geq |Y_2|$$

$|Y_2| = |X_2|$ gelten. Analog für $|Y_1| = |X_1|$. Damit sind T und U ebenfalls minimale Schnitte, also sind C_{12} und C_{21} tight. Schließlich ist $V - C_{ij} - N(C_{ij})$ für $i \neq j$ zusammenhängend, denn es ist eine Vereinigung zweier nicht-leerer Mengen (Q_j und P_i) mit einem nicht-leeren Schnitt (C_{ji}). \square

Bei sich stark kreuzenden Schnitten gilt sogar $|X_1| = |Y_1| = |Y_2| = |X_2|$.

Dieses Ergebnis kann für $\frac{\varepsilon}{10}$ -ausgewogene minimale Schnitte benutzt werden, die sich zwar schwach, aber nicht stark kreuzen. Dann ist ein Viertel (o.B.d.A. C_{11}) leer und mit $\kappa < \frac{\varepsilon n}{10}$ sind C_{12} und C_{21} nicht leer.

Zur Konstruktion einer maximalen Familie von zweiseitigen $(\frac{\varepsilon}{10}, \kappa)$ -Schnitten mit den Seiten A_i und B_i so, dass $A_i \subseteq B_j$ für alle $i \neq j$ gilt, wird der folgende Greedy-Algorithmus verwendet.

1. Kennzeichne \mathcal{F} die Familie aller $\frac{\varepsilon}{10}$ -ausgewogenen zweiseitigen minimalen Schnitte. $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ sei die Familie der Seiten aller $F \in \mathcal{F}$. Stoppe, wenn \mathcal{F} leer ist.
2. Wähle eine Komponente A_0 so aus $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, dass A_0 keine weitere Menge aus $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ enthält. Sei $X_0 = N(A_0)$ der zugehörige Schnitt und B_0 die zweite Komponente von X_0 . Setze jeweils einen Detektor in A_0 und B_0 .
3. Lösche alle Schnitte aus \mathcal{F} , die A_0 nicht erhalten. Für alle $X \in \mathcal{F}$ sei $A(X)$ diejenige Seite von X , die A_0 nicht enthält.
4. Starte mit der ersten Iteration. Wähle im i -ten Iterationsschritt einen Schnitt $X_i \in \mathcal{F}$ so aus, dass $A(X_i)$ kein anderes $A(X)$ für alle $X \in \mathcal{F}$ enthält. Sei $A_i = A(X_i)$ und B_i die andere Seite von X_i .
5. Setze einen Detektor in A_i . Entferne alle Schnitte von \mathcal{F} , die $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_i$ nicht erhalten. Stoppe, wenn \mathcal{F} leer ist, ansonsten starte den nächsten Iterationsschritt.

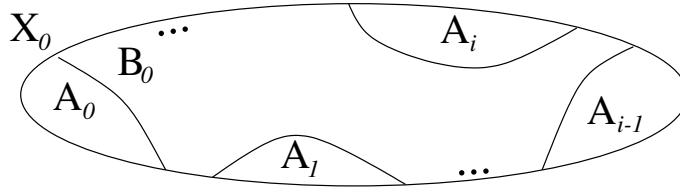


Abbildung 3.4: Unterteilung des Graphen nach dem i -ten Iterationsschritt durch den Algorithmus. Quelle: [4, S. 10].

Nach Konstruktion sind alle A_i paarweise disjunkt und jedes $A_i \geq \frac{\varepsilon}{10}$. Demnach stoppt der Algorithmus nach höchstens $\frac{10}{\varepsilon}$ Schritten und dem Setzen von höchstens $\frac{10}{\varepsilon}$ Detektoren – einem je Schritt.

Lemma 3.10. *Für alle $i \neq j$ ist $A_j \subseteq B_i$. Insbesondere sind X_i und A_j disjunkt.*

Beweis: Es wird gezeigt, dass für alle $i \neq j$ X_i und A_j disjunkt sind. Hieraus folgt sofort, dass $A_j \subseteq B_i$ gelten muss. Nach Konstruktion gilt $A_j \subseteq B_i$ für $j \leq i$ und für $j < i$ sind alle X_i und A_j disjunkt, da ein neuer Schnitt die bereits vorhandenen A_j erhält. Ist $j > i$, dann gilt $A_i \subseteq B_j$. Angenommen, A_j und X_i sind nicht disjunkt, dann existiert ein $v \in A_j \cap X_i$, der mindestens eine Kante zu A_i und damit zu B_j hat. Demnach können A_j und B_j nicht getrennt sein, ein Widerspruch. ζ □

Korollar 3.11. *Jedes B_i enthält mindestens einen Detektor.*

Beweis: B_0 erhält im Schritt 2 einen Detektor. Für $i > 0$ und $i \neq j$ gilt $A_j \subseteq B_i$. Da jedes A_j einen Detektor enthält, enthält auch jedes B_i einen. □

3.3 Schwache Detektormenge für minimale Knotenschnitte

Die Detektormenge, die der Greedy-Algorithmus aus dem letzten Abschnitt liefert, wird mit \mathcal{D}_2 bezeichnet. \mathcal{D}_1 sei eine schwache Detektormenge für $\frac{\varepsilon}{10}$ -Shredder und $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Im Weiteren wird bewiesen, dass \mathcal{D} eine schwache Detektormenge für minimale Knotenschnitte ist.

Lemma 3.12. *Falls eine Menge $A \subset A_i$, die tight ist, eine Größe von $\geq \frac{\varepsilon n}{10}$ hat, dann ist der Schnitt $N(A)$ ein Shredder.*

Beweis: Angenommen, die Aussage stimmt nicht. Dann wäre $N(A)$ ein zweiseitiger $(\frac{\varepsilon}{10}, \kappa)$ -Schnitt, der B_i und damit $\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j$ erhält. Also wurde $N(A)$ bis zum i -ten Iterationsschritt nicht von \mathcal{F} entfernt und hätte somit aufgrund der Minimalität der Mengen A_i anstelle von X_i gewählt werden müssen. ζ □

Das nächste Lemma zeigt, wie eine Detektormenge für Shredder hilft, zweiseitige minimale Schnitte zu erkennen.

Lemma 3.13. *Sei Y ein $\frac{\varepsilon}{10}$ -ausgewogener zweiseitiger minimaler Schnitt mit den Seiten C und D . Angenommen, D enthält eine Menge W der Größe $\geq \frac{\varepsilon n}{10}$ so, dass $N(W)$ ein Shredder ist. Dann enthält $D + Y$ mindestens einen Detektor aus \mathcal{D}_1 .*

Beweis: Der Shredder $Z = N(W)$ ist $\frac{\varepsilon}{10}$ -ausgewogen und wird somit von \mathcal{D}_1 erkannt. Da Y ein Schnitt ist, existieren keine Kanten zwischen W und C . Somit liegt Z in $D + Y$. Also ist C in $G \setminus Z$ zusammenhängend und liegt deshalb in einer einzigen Komponente von $G \setminus Z$. Somit liegt mindestens ein Detektor aus \mathcal{D}_1 nicht in C , und damit in $D + Y$. □

Lemma 3.14. *Angenommen, Y ist ε -ausgewogen und A_i trifft D . Dann ist entweder ein Detektor in $D + Y$ oder es gelten die beiden folgenden Bedingungen:*

- (a) Y kreuzt X_i stark und
- (b) $N(D \cap B_i)$ ist ein zweiseitiger $\frac{8\varepsilon}{10}$ -ausgewogener minimaler Schnitt.

Beweis: Angenommen, in $D + Y$ befindet sich kein Detektor. Da A_i und B_i jeweils einen Detektor enthalten, müssen sie C treffen, da die Detektoren nur in C liegen können. Entsprechend Lemma 3.9 und den Vierteln $B_i \cap C$ und $A_i \cap D$ ist $A_i \cap D$ tight. Es wird behauptet, dass $|B_i \cap D| \geq \frac{8\varepsilon n}{10}$ ist. Wäre dem nicht so, dann müsste $|A_i \cap D| \geq \frac{\varepsilon n}{10}$ sein und nach Lemma 3.13 wäre $N(A_i \cap D)$ ein zweiseitiger Schnitt, was Lemma 3.12 widerspricht.

Das beweist (a), da alle Viertel nicht leer sind, und zeigt, dass $N(B_i \cap D)$ ein $\frac{8\varepsilon}{10}$ -ausgewogener Schnitt ist. Nach Lemma 3.9 ist $B_i \cap D$ tight und nach Lemma 3.13 $N(B_i \cap D)$ zweiseitig. □

Theorem 3.15. *Wenn $\kappa \leq \frac{\varepsilon^2 n}{20}$ ist, dann wird jeder ε -ausgewogene zweiseitige minimale Schnitt von \mathcal{D} erkannt.*

Beweis: Sei Y ein ε -ausgewogener zweiseitiger minimaler Schnitt mit den beiden Seiten C und D . Es muss gezeigt werden, dass entweder Y oder aber beide Seiten von Y von \mathcal{D} getroffen werden.

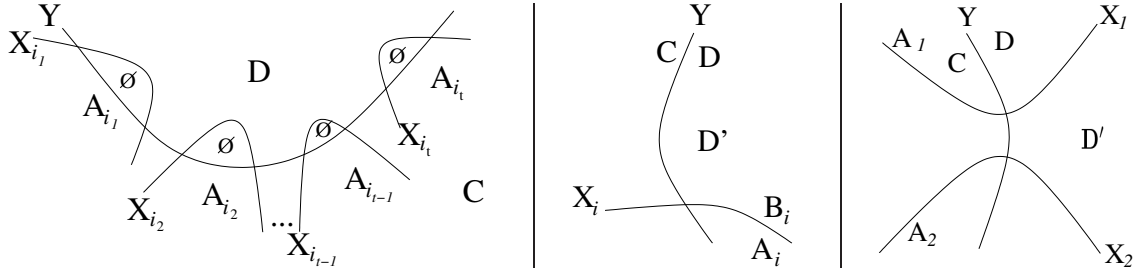


Abbildung 3.5: Beweisskizze zu Theorem 3.15 (Y kreuzt entweder kein X_i stark, kreuzt genau ein X_i stark oder kreuzt mehr als ein X_i stark.). Quelle: [4, S. 11].

Angenommen, dem wäre nicht so. Dann ist o.B.d.A. $\mathcal{D} \subset C$, was bedeutet, dass C jedes A_i und jedes B_i treffen muss. Damit ist $A_i \not\subseteq D + Y$ für alle i . Weiterhin kann D nach Lemma 3.13 keine zerschnittenen Mengen enthalten, die tight und größer als $\frac{8\varepsilon n}{10}$ sind. Es gibt genau drei Fälle, wie Y und die Mengen X_i in Relation stehen können (siehe Abbildung 3.5):

- (i) Y kreuzt kein X_i stark,
- (ii) Y kreuzt genau ein X_i stark oder
- (iii) Y kreuzt mindestens zwei X_i stark.

Es wird jetzt nacheinander bewiesen, dass diese drei Fälle nicht auftreten können und Y somit doch erkannt wird.

zu (i): Um diesen Beweis für den zweiten Fall wieder verwenden zu können, wird angenommen, dass Y lediglich $\frac{8\varepsilon n}{10}$ -ausgewogen ist.

Da angenommen wurde, X_i und Y kreuzen sich nicht stark, sind nach Lemma 3.14 alle A_i disjunkt zu D . Seien $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_t}$ alle Schnitte, die sich mit D überschneiden. Sei $D_j = D - \left(D \cap \bigcup_{h=1}^j X_{i_h} \right)$, $Y_j = N(D_j)$ und $C_j = V - Y_j - D_j$. Mit $\kappa \leq \frac{\varepsilon^2 n}{20}$ gilt

$$|D_j| \geq |D| - \sum_{h=1}^j \underbrace{|X_{i_h}|}_{=\kappa} \geq \frac{8\varepsilon n}{10} - \kappa \frac{10}{\varepsilon} \geq \frac{3\varepsilon n}{10}.$$

Durch Induktion wird jetzt gezeigt, dass jedes D_j tight und zusammenhängend ist und dass der zugehörige Schnitt $Y_j = N(D_j)$ zweiseitig für jedes $0 \leq j \leq t$ ist. Klar durch die Definition von Y und D ist, dass D_0 tight und zusammenhängend und $N(D_0) = Y$ zweiseitig ist. Angenommen, die Aussage stimmt für D_{j-1} , dann muss sie jetzt noch für D_j bewiesen werden. Es gilt

$$D_j = D_{j-1} - D_{j-1} \cap X_{i_j} = B_{i_j} \cap D_{j-1}.$$

Wenn D_j und X_{i_j} disjunkt sind, dann ist $D_j = D_{j-1}$ und man ist fertig. Andernfalls wird D_{j-1} nicht von X_{i_j} erhalten und $C_{j-1} \supseteq C$ trifft sowohl A_{i_j} als auch B_{i_j} , die somit nicht von Y_{j-1} erhalten werden. Also kreuzen sich Y_{j-1} und X_{i_j} (schwach). Demnach erfüllen sie die Bedingungen von Lemma 3.9, wobei $A_{i_j} \cap C_{j-1}$ und $B_{i_j} \cap D_{j-1}$

nicht leer sind und $D_j = B_{i_j} \cap D_{j-1}$ damit tight ist. Also ist nach Lemma 3.13 D_j zusammenhängend und $N(D_j)$ ist ein zweiseitiger Schnitt.

D_t und jedes X_i sind disjunkt und damit sind auch alle A_i und Y_t disjunkt und liegen deshalb in $V - D_t - Y_t$. Folglich wird $\cup A_i$ von Y_t erhalten. Andererseits ist $|D_t| \geq \frac{3\varepsilon n}{10}$ und $|C_t| \geq |C| \geq \varepsilon n$. Damit ist Y_t ein $\frac{3\varepsilon}{10}$ -ausgewogener zweiseitiger minimaler Schnitt und erhält $\cup A_i$. Der Algorithmus hätte einen weiteren Schritt machen müssen, also ein Widerspruch. ζ

zu (ii): Sei $D' = D \cap B_i$. Nach Lemma 3.14 und der Annahme, dass keine Detektoren in $D + Y$ sind, hat D' mindestens eine Größe von $\frac{8\varepsilon n}{10}$, ist tight und der dazugehörige Schnitt $Y' = D \cap X_i + X_i \cap Y + Y \cap B_i$ ist zweiseitig und minimal.

Da $D' \subseteq D$ ist und nur ein A_i D trifft (jedoch nicht D'), gibt es kein A_i , das D' trifft. Also kreuzt nach Lemma 3.14 Y' kein X_i stark und Y' wird wie im vorherigen Fall von \mathcal{D} erkannt. Das beweist, dass mindestens ein Detektor in $Y' + D'$ liegt und wegen $Y' + D' \subseteq Y + D$ auch einer in $Y + D$. ζ

zu (iii): Es wird gezeigt, dass $D + Y$ nach Lemma 3.14 entweder einen Detektor aus \mathcal{D} enthält, oder der Algorithmus einen weiteren Schritt hätte machen müssen. O.B.d.A. seien es X_1 und X_2 , die von Y stark gekreuzt werden.

Es wird behauptet, dass jedes der beiden Mengentripel (A_1, X_1, B_1) und (A_2, X_2, B_2) Y in dieselben Teilmengen unterteilt. Es muss also $X_1 \cap Y = X_2 \cap Y$, $A_1 \cap Y = B_2 \cap Y$ und $B_1 \cap Y = A_2 \cap Y$ gezeigt werden. Es gilt $Y = Y \cap A_i + Y \cap X_i + Y \cap B_i$. Durch $A_1 \subseteq B_2$ ist $Y \cap A_1 \subseteq Y \cap B_2$ (und analog $Y \cap A_2 \subseteq Y \cap B_1$). Nach Lemma 3.9 gilt $|Y \cap A_1| = |Y \cap B_1|$ und $|Y \cap A_2| = |Y \cap B_1|$ und somit ist $Y \cap A_1 = Y \cap B_2$ und $Y \cap A_1 = Y \cap B_2$, also auch $Y \cap X_1 = Y \cap X_2$.

Jetzt kann gezeigt werden, dass es entweder eine Teilmenge D' von D gibt, die für den nächsten Schritt des Algorithmus hätte verwendet werden müssen, oder Y wurde bereits von \mathcal{D} erkannt.

Da X_i ($i = 1, 2$) Y stark kreuzt, wird D durch X_i in drei nichtleere Teile $D'_i = D \cap B_i$, $D''_i = D \cap A_i$ und $D'''_i = D \cap X_i$ unterteilt. Aus Lemma 3.14 und der Annahme, dass $\mathcal{D} \cap (D + Y) = \emptyset$ ist, kann geschlossen werden, dass D'_i tight, $|D'_i| \geq \frac{8\varepsilon n}{10}$ und $N(D')$ ein zweiseitiger minimaler Schnitt ist.

Sei $D' = D'_1 \cap D'_2$. Es wird behauptet, dass der zugehörige Schnitt $Z = N(D')$ ein zweiseitiger $(\frac{\varepsilon}{10}, \kappa)$ -Schnitt ist, der $\cup A_i$ erhält, was aber der Abbruchbedingung des Algorithmus widerspricht.

Um das zu beweisen, wendet man Lemma 3.9 auf die Schnitte $N(D'_1)$ und $N(D'_2)$ an. Man erhält, dass D' tight ist und eine Größe von

$$|D'| = |D'_1 \cap D'_2| = |D - (D''_1 + D'''_1) \cup (D''_2 + D'''_2)| \geq \varepsilon n - 2 \left(\frac{\varepsilon n}{10} + \kappa \right) \geq \frac{6\varepsilon n}{10}$$

hat. Damit ist Z $\frac{\varepsilon}{10}$ -ausgewogen und D' ist nach Lemma 3.13 und der Annahme, dass \mathcal{D} und $Y + D$ disjunkt sind, zusammenhängend.

Da $Z = (X_1 \cup X_2) \cap (D \cup Y)$ ist, ist $V - D' - Z$ als Vereinigung dreier nichtdisjunkter zusammenhängender Mengen C , A_1 und A_2 auch zusammenhängend, und Z ist zweiseitig. Weiterhin sind Z und $\cup A_i$ nach Lemma 3.10 disjunkt.

Um zu zeigen, dass $Z \cup A_i$ erhält, reicht es zu zeigen, dass alle A_i mit D' disjunkt

sind. Angenommen, es gäbe ein A_i , das D' trifft. Da es nicht komplett in D enthalten sein kann, und damit auch nicht in D' , trifft es Z , ein Widerspruch. ζ \square

Wie bereits im Beweis zu Theorem 3.7 liefert das Coupon Collector Problem die probabilistische Abschätzung.

Theorem 3.16. *Angenommen, $\kappa < \frac{\varepsilon^2 n}{20}$. Dann ist eine Menge von $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon \delta})$ zufällig ausgewählten Knoten eine schwache (ε, κ) -Detektormenge mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $(1 - \delta)$.*

Literatur

- [1] CHERIYAN, Joseph ; THURIMELLA, Ramakrishna: Fast Algorithms for k -shredders and k -node Connectivity Augmentation. In: *Journal of Algorithms* (1999), Nr. 33. – www.cs.du.edu/~ramki/papers/shredder.pdf
 - [2] FAKCHAROENPHOL, J.: An Improved VC-Dimension Bound for Finding Network Failures. In: *Master's Thesis* (2001). – www.cpe.ku.ac.th/~jtf/papers/master.ps
 - [3] KLEINBERG, Jon: Detecting a Network Failure. In: *41st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (2002). – www.cs.cornell.edu/home/kleinber/focs00-det.ps
 - [4] KLEINBERG, Jon ; SANDLER, Mark ; SLIVKINS, Aleksandrs: Network Failure Detection and Graph Connectivity. In: *15th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2004). – www.cs.cornell.edu/home/kleinber/soda04-det.ps
 - [5] MADER, Wolfgang: Über die Maximalzahl kantendisjunkter A -Wege. In: *Archiv der Mathematik* (1978), Nr. 30, S. 325–336.
-

