Network Failure Detection and Graph Connectivity

Vortrag im Rahmen des Seminars
„*Kombinatorische Optimierung*“
im Wintersemester 2004/2005

von Andreas Baude

19.01.2005

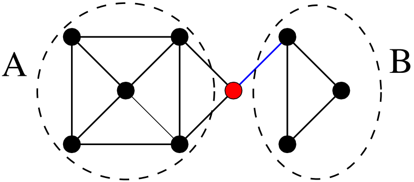
Motivation

- Erkennung von Netzwerkausfällen.
- Platzierung von Detektoren.

- Wie viele Detektoren benötigt man?
- Wo sind diese Detektoren zu platzieren?

(ε, k)-Ausfall

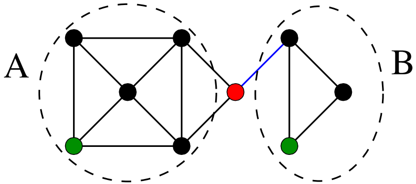
- G zusammenhängend, n Knoten.
- $\leq k$ Netzwerkelemente werden entfernt.



$(\frac{1}{3}, 1)$-Ausfall

(ε, k)-Detektormenge

- Jeder (ε, k)-Ausfall wird entdeckt.



$(\frac{1}{3}, 1)$-Detektormenge

Gliederung

Detektoren für Ausfälle von Kanten

Detektormenge für minimale Kantenschnitte

Kleinere Detektormengen für Kantenausfälle

Detektoren für Ausfälle von Knoten

Starke Detektormengen für Shredder

Detektormenge für minimale Knotenschnitte

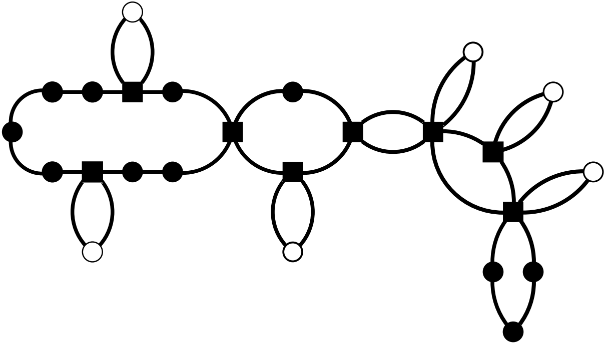
Detektoren für Ausfälle von Kanten

- Nur Kantenschnitte.
- Nur Detektoren für Kantenausfälle.
- Gegenspieler entfernt $\leq k$ Kanten.
- Keine (ε, k)-Kantenausfälle für $k < \lambda$.

Detektormenge für minimale Kantenschnitte

- Graph besitzt eine Kaktusrepräsentation.
- Reduzierte ε-ausgewogenen Kaktusrepräsentation.
- Kleinste (ε, λ)-Detektormenge ist T-kanonische Menge.
- Algorithmus liefert T-kanonischen Menge.

Kaktus



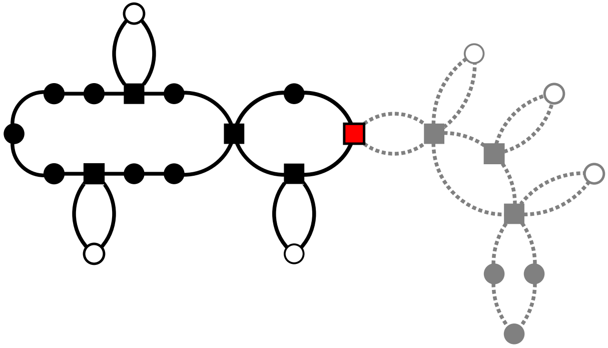
(∘) Blätter, (•) Kreisknoten, (▪) Astknoten.

Kaktusrepräsentation

- Repräsentiert alle minimalen Schnitte.
- Graph hat Kaktusrepräsentation der Größe $\mathcal{O}(n)$.
- Kann in polynomieller Zeit erzeugt werden.

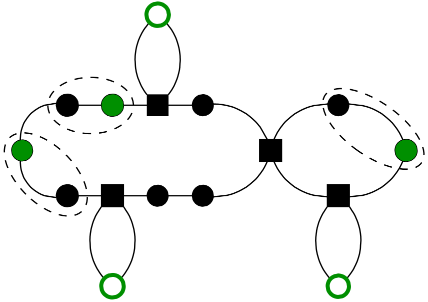
Interessant sind nur ε-ausgewogene Schnitte...

Reduzierte ε-ausgewogene Kaktusrepräsentation



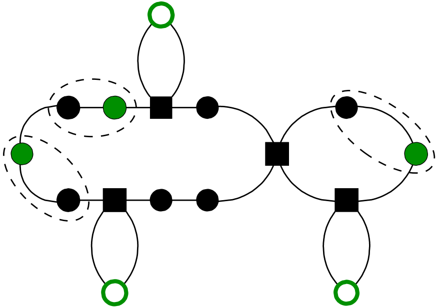
T-kanonische Menge

- Jedes Blatt, keine Astknoten.
- Ein Element je heavy Teilkreis.
- Nur ein Detektor je Knoten.



(ε, λ)-Detektormenge

- Jede kleinste (ε, λ)-Detektormenge ist T-kanonisch.
- Jede T-kanonische Menge ist eine (ε, λ)-Detektormenge.



Eine Richtung

Jede kleinste (ε, λ)*-Detektormenge ist* T*-kanonisch.*

Beweis: Zu zeigen:

(i) Höchstens ein Detektor wird auf jeden Knoten in T abgebildet.

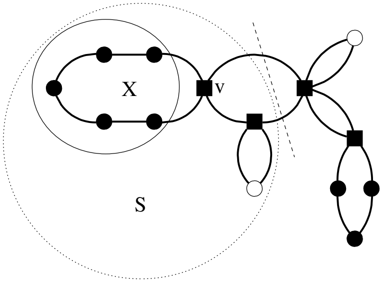
(ii) Für jedes Blatt und jeden heavy Teilkreis gibt es einen Detektor, der darauf abgebildet wird.

(iii) Es gibt keine Detektoren, die auf Astknoten in T abgebildet werden. □

Andere Richtung

Jede T-kanonische Menge ist eine (ε, λ)-Detektormenge.

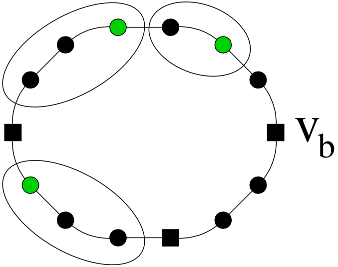
Beweis: Zeige: Jede Menge $S \subseteq T$, die tight und heavy ist, enthält ein Blatt oder einen heavy Teilkreis.



Induktion über die Größe von S. □

Algorithmus

- Erzeugen einer kleinsten T-kanonischen Menge.
- Inhalt: alle Blätter und kleinste Detektormenge pro Kreis.



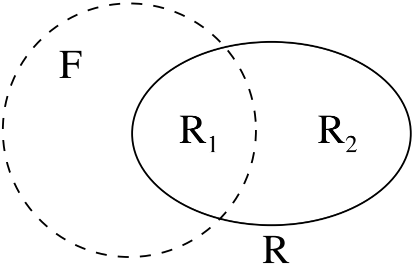
- Setzen von $\leq \frac{1}{\varepsilon}$ Detekoren.

Kleinere Detektormengen für Kantenausfälle

- $\mathcal{F}$ Familie der Seiten aller minimalen Schnitte aus $\leq k$ Kanten.
- Detektor in jedes $F \in \mathcal{F}$ der Größe $\geq \varepsilon n$.

Zerschmetterte Mengen

- Menge R wird zerschnitten, z.B. in R_1 und R_2.
- $\mathcal{F}$ zerschmettert R, wenn $R_1 = R \cap F$ für $F \in \mathcal{F}$.
- VC-Dimension d ist größtes R, das von $\mathcal{F}$ zerschmettert wird.



Bekannte/Neue Ergebnisse

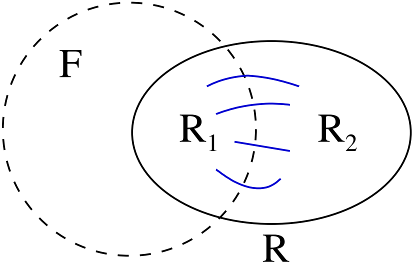
J. Kleinberg, „*Detecting a Network Failure*“, 2000:

- VC-Dimension ist $\mathcal{O}(k)$.
- $\mathcal{O}(\frac{k}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon})$ zufällig ausgewählte Knoten sind mit hoher Wahrscheinlichkeit eine (ε, k)-Detektormenge.

Ziel: VC-Dimension ist $\mathcal{O}(\frac{k}{\lambda})$.
Damit: $\mathcal{O}(\frac{k}{\lambda\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon})$ zufällig ausgewählte Knoten sind mit hoher Wahrscheinlichkeit eine (ε, k)-Detektormenge.

Beweis der neuen VC-Dimension

- $|R| = r$, $\Omega(r\lambda)$ kantendisjunkte R-Pfade.



Detektoren für Ausfälle von Knoten

- Nur Knotenschnitte.
- Nur Detektoren für Knotenausfälle.
- Gegenspieler entfernt $\leq k$ Knoten.
- Keine (ε, k)-Knotenausfälle für $k < \kappa$.

Vorgehensweise

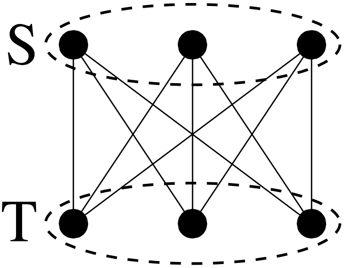
- (ε, κ)-Detektormenge für ε-Shredder.
- $(\frac{\varepsilon}{10}, \kappa)$-Detektormenge für zweiseitige $\frac{\varepsilon}{10}$-Schnitte.
- Kombination der beiden Detektormengen liefert (ε, κ)-Detektormenge für Knotenschnitte.

Starke Detektormengen für Shredder

- *Shredder* ist minimaler Schnitt, mit drei oder mehr Komponenten.
- ε-*Shredder* hat zwei Komponenten der Größe $\geq \varepsilon n$.
- Algorithmus für starke Detektormenge.

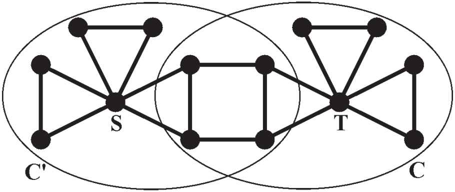
Überlappende Shredder

- Shredder dürfen sich nicht überlappen.
- Erreichbar durch: $\kappa < \varepsilon n$
  (siehe Cheriyan/ Thurimella (1999)).



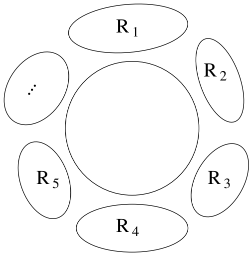
$\mathcal{F}$-Kopf

- $\mathcal{F}$ ist Familie von ε-Shreddern.
- Komponente eines Shredders wird $\mathcal{F}$-Kopf genannt, wenn sie weiteren Shredder trifft.
- Detektormenge trifft alle $\mathcal{F}$-Köpfe.



Konstruktion

- Entferne Shredder mit ≥ 2 Köpfen.
- Reste in unterschiedlichen Köpfen enthalten.
- Detektormenge hat Größe $\leq \frac{1}{\varepsilon}$.
- $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon\delta}\right)$ zufällige Knoten mit W. $1-\delta$.

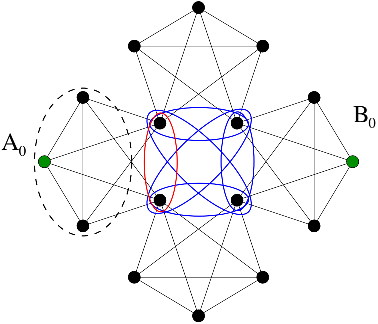


Detektormenge für zweiseitige minimale Schnitte

- Algorithmus für maximale Familie $\frac{\varepsilon}{10}$-ausgewogener zweiseitiger minimaler Schnitte.

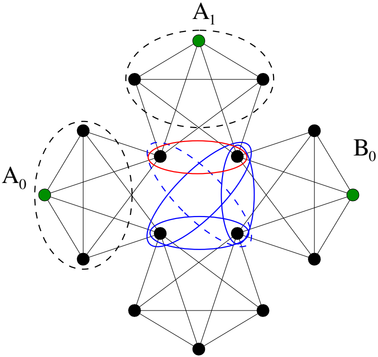
Algorithmus

Initialisierung



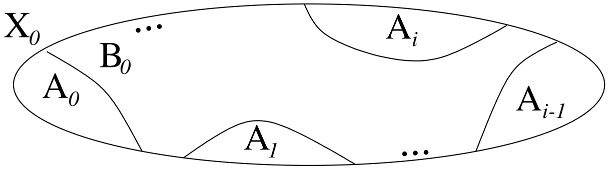
Algorithmus

Iteration



Algorithmus

Ausgabe



Algorithmus

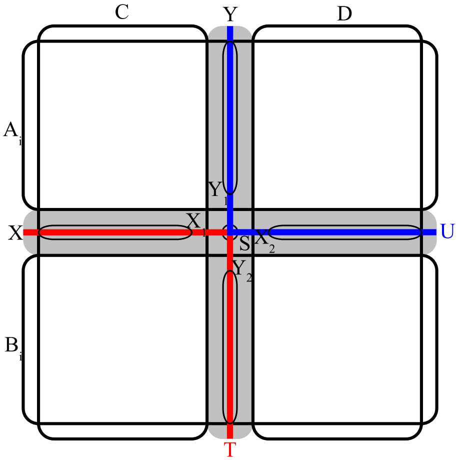
Eigenschaften

- Alle A_i sind paarweise disjunkt und jedes $A_i \geq \frac{\varepsilon}{10}$.
- Algorithmus stoppt nach $\leq \frac{10}{\varepsilon}$ Schritten.
- Es wurden $\leq \frac{10}{\varepsilon}$ Detektoren gesetzt.
- X_i und A_j disjunkt $\Rightarrow A_j \subseteq B_i \; \forall i \neq j$
- Alle A_i und alle B_i enthalten mindestens einen Detektor.

Charakterisierung der Detektormenge

- Detektormenge aus:
  - Schwacher Detektormenge für ε-Shredder.
  - Detektoren aus Algorithmus.
- **Behauptung:** Neue Detektormenge erkennt jeden (ε, κ)-Schnitt.
- Weitere Einschränkung: $\kappa \leq \frac{\varepsilon^2 n}{20}$.

Kreuzende Schnitte



Charakterisierung der Detektormenge

Beweis: Drei Fälle, wie Y und die Mengen X_i in Relation stehen können:

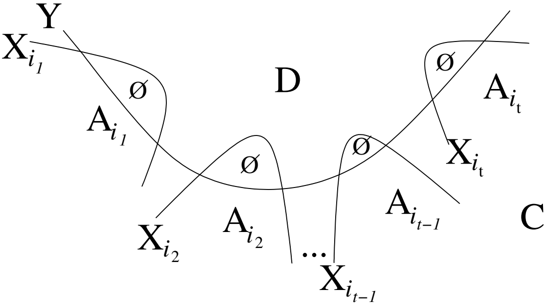
(i) Y kreuzt kein X_i stark.

(ii) Y kreuzt genau ein X_i stark.

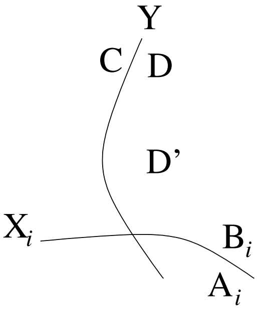
(iii) Y kreuzt mindestens zwei X_i stark.

Fälle können nicht auftreten, also wird Y erkannt.

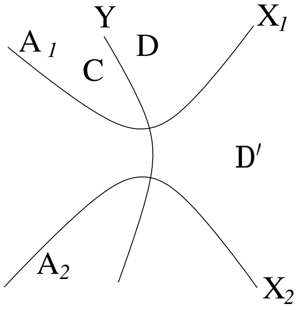
zu (i): *Y kreuzt kein X_i stark.*



zu (ii): *Y kreuzt genau ein X_i stark.*



zu (iii): *Y kreuzt mindestens zwei X_i stark.*



□

(ε, κ)-Detektormenge

- $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon\delta})$ zufällige Knoten sind Detektormenge mit Wahrscheinlichkeit $1 - \delta$.

Vielen Dank für das Interesse!